粒子的结构模型及其力学特征

李章林 2005.2.18

摘要

依据弧理论可知，不存在没有内部结构的任何质点。对类弧合子构造中的电子旋线经射影几何处理后可得一个类似 Mŏbius 带的结构模型。将此模型与粒子的各种反应过程加以关联，通过对该 Mŏbius 带结构模型进行分解、连接实验的各种结果进行分析和比较，提出了一切基本粒子的共享结构模型，并用射影几何的方法研究了粒子的力学特征。结果表明：某一射影直线上的点所对应的描述粒子力学特征的力学变量都与该直线上的力学变量基有确定的交比，且描述粒子同一力学特征的不同直线上的点所对应的力学变量都是射影对应的。粒子的波函数与粒子运动直线上四点的交比成正比。对所有粒子普遍适用且与实验符合一致的质量关系是

D_n=（$m^a{}_1$，$m^a{}_3$;$m^a{}_2$，$m^a{}_n$）= 2/（n-1）-1。

关键词：粒子结构，力学特征， 射影对应，夸克囚禁，质量关系

一、引言

QCD、QED 及 SM 一起很好地描述了粒子的动力学特征。但同时也留下了一些深层问题需要进一步探讨。例如：可观察粒子是否都具有特定的、甚或相同的形状和结构，各种粒子的力学特征本质上有联系吗？夸克囚禁的实质是什么等等。正是基于上述考虑，在本文第二部分中，通过对粒子的各种反应过程与我们所提出的粒子结构的摄影几何模型（Mŏbius 带结构模型）的分解、连接实验之间的各种结果进行比对和分析，证实了弧理论关于一切物质质点都有一个统一性内部结构的结论。研究结果表明，亚粒子囚禁是一种普遍的自然现象，

其产生的实质性原因来自于粒子的特定结构，夸克囚禁只是其中之一。第三部分讨论粒子的力学特征并指出，描述某个客观事件的某类力学变量的每一个力学变量都对应于射影直线上的相应的点，且两个基点力学变量 G_1、G_3 和单位点力学变量 G_2 构成一个力学变量基，同一直线上其它点所对应的力学变量都与力学变量基有确定的交比；描述同一客观事件的同一力学特征的不同直线上的点所对应的力学变量都是射影对应的。其次讨论粒子的波函数与该粒子运动轨迹上包括圆环点在内的四点的交比之间的关系，提出并求解粒子的波动方程，给出对所有粒子普遍适用的质量关系并与实验数据进行比较。第四部分为全文总结。

二、粒子的结构模型

首先，让我们做粒子结构的 Mŏbius 带模型的分解、连接实验如下: 用纸条做几个右旋（或左旋）的 Mŏbius 带，在以下操作中，除了螺旋方向不同外，实验结果对左旋或右旋 Mŏbius 带都是一样的。

1、沿 Mŏbius 带宽度的中线剪一周，一个 Mŏbius 带变成了一个螺旋带（以下简称扭了两次或多次的普通封闭带为螺旋带），螺旋带的宽度是 Mŏbius 带宽度的 1/2，中线长度是 Mŏbius 带中线长度的 2 倍。

2、沿 Mŏbius 带宽度的 1/4 处（1/6 处）剪下去，得到了两个（三个）相互套在一起的螺旋带。两个（三个）螺旋带宽度相等，中线等长。当不对所剪的宽度加以限制时，也得到同样的结果，只是两个（三

个）螺旋带宽度不等。照此方法，可以得到许多螺旋带。虽然各个螺旋带可以有不同的宽度，但它们却有相同的螺旋性质，另外，沿 Mǒbius 带的一边不等于带宽的 1/2 处剪下去，得到一个新的 Mǒbius 带与一个螺旋带，二者相互套在一起，所得到的新的 Mǒbius 带除了宽度变化外，其中线长度和螺旋性质与原 Mǒbius 带相同。

3、按照螺旋的相反方向倒转一个螺旋带，它变成了一个中间有缝（在中线上）的 Mǒbius 带，将中间有缝的 Mǒbius 带的中缝两边平行连接，它变成了中间无缝的 Mǒbius 带，横向截断有缝的 Mǒbius 带，得到了四个接头，将四个接头交叉连接，得到了两个 Mǒbius 带，并且根据四个接头的连接方式不同，两个 Mǒbius 带可以是分开的，也可以是相互套在一起的。横向截断两个 Mǒbius 带后交叉连接所得的接头，得到了一个螺旋带。以下简称横向截断 Mǒbius 带（螺旋带）为截断，简称沿着 Mǒbius 带（螺旋带）任一边的平行线将 Mǒbius 带（螺旋带）分成几个部分螺旋带的操作为分割，截断和分割统称分解；简称 Mǒbius 带（螺旋带）被分割、截断后各接头的交叉连接为交接，简称从中锋处将有缝的 Mǒbius 带平行对接为平接，交接和平接统称连接。

4、通过分解和连接，（2n+1）个螺旋相同的 Mǒbius 带可以构成一个螺旋与原 Mǒbius 带相同的，中线长度为原 Mǒbius 带中线长度之和的新的 Mǒbius 带；2n 个螺旋相同的 Mǒbius 带可以构成一个螺旋带（n=1，2，3……）。

其次，让我们考察日常经验中质点与物质的形状和结构的概念。

实际上，质点与物质的形状和结构的概念是一个完全相对的概念，只有当系统中的观察者与作为被观察者的物质之间的距离足够大、或虽然二者之间的距离不是足够大但被观察物质是足够小以致于为观察该物质所使用的仪器或方法不足以分辨物质的具体形状和结构、或被观察物质的形状和结构对所要测量的力学量没有影响、或没有足够的影响以致于其形状和结构对被测量的力学量的影响可以忽略而又不产生不可接受的误差时，质点的概念才是近似成立的，否则就必须考虑被观察物质的形状和结构及各力学量对其形状和结构的依赖关系。因此，在粒子物理中，是把粒子看作没有结构的质点，还是看作具有某种特定结构和形状的物质，一定要根据具体的情况和要求而定。在我们对粒子的衰变、湮没、碰撞、产生等粒子反应同 Mŏbius 带的分解、连接实验的各种结果进行综合分析和比较后发现，在解释夸克囚禁及计算粒子质量谱时，必须考虑粒子的具体形状和结构而不能将其视为没有具体形状和结构的质点。进一步研究发现，我们所建立的粒子结构 Mŏbius 带模型可以很好的表述粒子的形状和结构，两者间存在着非常密切的内在一致性。因此，提出粒子结构模型如下：类弧子结构模型是任意可观察粒子的共享结构模型。在任意一个相互作用系统中，粒子的湮没过程相当于粒子结构的分解过程，粒子的产生过程相当于粒子结构的连接过程。根据上述模型可即得如下推论:

1、包括夸克在内的亚粒子以及不可观察的虚粒子都有像螺旋带模型一样的形状和结构。

2、粒子的能量正比于粒子的 Mŏbius 带结构的表面积，从而当粒

子的 Mŏbius 带结构的宽度一定时，粒子的能量正比于 Mŏbius 带结构的中线长度，当其中线长度一定时，粒子的能量正比于 Mŏbius 带结构的宽度。

3、因为粒子之间的非弹性碰撞过程包含粒子的湮没和产生过程，所以粒子的非弹性碰撞和衰变过程相当于粒子的 Mŏbius 带结构的分解和连接过程。

4、亚粒子囚禁是一种普遍现象，因分割粒子的 Mŏbius 带结构时，各种亚粒子的螺旋带结构相互缠绕，彼此套在一起。如若试图观察这些亚粒子的螺旋带结构，就必须对其进行截断和连接。如此，则实验上所观察到的粒子就已经不再是亚粒子的螺旋带结构而是由亚粒子的螺旋带结构分解、连接成的普通粒子的 Mŏbius 带结构了。例如，夸克囚禁可被解释为：当我们试图观察介子（重子）的组成子夸克的螺旋带结构时，就必须用高能粒子将其分割，而根据粒子的 Mŏbius 带结构模型，分割的结果是该介子（重子）变成了两个（三个）相互套在一起的夸克螺旋带结构，当构成介子（重子）的夸克螺旋带结构的质心之间的距离相对来讲比较近时，夸克螺旋带结构之间相对松动自由，但随着夸克螺旋带结构的质心之间的距离不断增加，夸克螺旋带结构的质心之间的距离将会达到一个极大值，因为夸克螺旋带结构之间相互缠绕，不能彼此自由离散，除非这种相互缠绕的夸克螺旋带结构被截断和交接；然而如此，我们所观察到的粒子就不是夸克的螺旋带结构而是由夸克螺旋带结构所截断和交接成的普通粒子的 Mŏbius 带结构了，这便是夸克囚禁 。需要特别指出，因为 Mŏbius 带

结构模型是典型的射影平面，所以从场论的观点讲，如果夸克的颜色力线像射影平面上的直线一样，那么，夸克的颜色力线就永远是闭合的。按照文献[1]的观点，夸克所处的射影空间就是色介电常数 k=1 的袋。

为了进一步说明粒子的衰变、湮没、碰撞、产生与粒子的 Mŏbius 带结构和亚粒子的螺旋带结构的分解、连接之间的类比关系，以下分析几个具体的粒子反应：

1、$\mu^- \to e + \upsilon_\mu + \upsilon_e$。该反应表示$\mu_-$粒子的 Mŏbius 带结构先被分割成一个虚粒子的螺旋带结构和一个υ_μ粒子的 Mŏbius 带结构，然后该虚粒子的螺旋带结构又被截断和交接成一个 e 粒子的 Mŏbius 带结构和一个υ_e粒子的 Mŏbius 带结构。因 e 粒子的 Mŏbius 带结构和υ_e粒子的 Mŏbius 带结构是由同一个螺旋带结构通过截断和交接成对产生的,所以 e 粒子的 Mŏbius 带结构与υ_e粒子的 Mŏbius 带结构宽度相同,因υ_μ粒子的 Mŏbius 带结构直接来自于μ_-粒子的 Mŏbius 带结构,所以μ_-粒子的 Mŏbius 带结构与υ_μ粒子的 Mŏbius 带结构有相同的中线长度，但宽度不等，这或许也能说明 e 轻子数和μ轻子数的不同。

2、$\mu^- + p \to n + \upsilon_\mu$。该反应表示一个$\mu_-$粒子的 Mŏbius 带结构和一个 p 粒子的 Mŏbius 带结构被截断和交接成一个虚粒子的螺旋带结构，然后,虚粒子的螺旋带结构被截断和交接成 n 粒子的 Mŏbius 带结构和υ_μ粒子的 Mŏbius 带结构，两个粒子的 Mŏbius 带结构的宽度相同。

3、υ_{μ}+d→l^{-}+ u。该反应表示一个 d 夸克的螺旋带结构被截断和交接为两个 Mŏbius 带结构，其中一个是 l^{-}粒子的 Mŏbius 带结构，另一个 Mŏbius 带结构又与υ_{μ}粒子的 Mŏbius 带结构被截断和交接为一个 u 夸克的螺旋带结构。其它如介子光生、多重产生、正负电子对撞等等，都可以用与以上相同的机制解释，同时,由于粒子的 Mŏbius 带结构的特殊性所致，一个粒子的 Mŏbius 带结构，无论被分解和连接多少次,它的宽度及中线长度可以改变,但其螺旋性质却不会改变，只要能量及其它守恒定律允许，一个粒子的 Mŏbius 带结构可以产生许多螺旋带结构，但一个螺旋带结构只能产生两个粒子的 Mŏbius 带结构，这便是成对产生现象。当然两个新粒子的 Mŏbius 带结构又能被分割成许多次级粒子的螺旋带结构，如此，一个粒子的 Mŏbius 带结构就是一个全息粒子源，且任意一个子代粒子的 Mŏbius 带结构都有其母粒子的 Mŏbius 带结构的全部螺旋特征。

三、粒子的力学特征

为简便起见,我们把任意粒子的一个相互作用系统称作一个客观事件,把描述一个客观事件的本质属性及其变化规律的物理量称作力学变量。显然，力学变量可以分为许多类，并且每一类力学变量只能描述客观事件的一个方面的力学特征。研究发现，描述某个客观事件的某种力学特征的某类力学变量的每一个力学变量都可看作同一射影直线上的点，并且两个基点力学变量 G_1、G_3 和一个单位点力学变量 G_2 构成了一个力学变量基，该直线上与点 n（n≥4）相对应的力

学变量 G_n 都与力学变量基有确定的交比 D_n。适当选取力学变量基，可以使（G_1 ，G_3 ）h（G_2 ，G_∞ ），其中 G_∞是该射影直线上的无穷远元素。因而描述同一客观事件的同一力学特征的不同射影直线上的点都是射影对应的。守恒定律可以表示为客观事件发生前后各力学变量的交比不变，下面，带星号和不带星号的同一力学变量代表发生相互作用前后的同一力学变量或不同坐标系中的同一个力学变量：

$$(G_1, G_3; G_2, G_\infty) = (G^*_1, G^*_3; G^*_2, G_\infty) = -1 \quad (1)$$

$$D_n = (G_1, G_3; G_2, G_n) = (G^*_1, G^*_3; G^*_2, G^*_n) \quad (2)$$

$$(G_n - G_2) / (G_3 - G_1) = (G^*_n - G^*_2) / (G^*_3 - G^*_1) \quad (3)$$

例如：盖尔曼-西岛关系可以用粒子的同位旋第三分量 I_3，超荷 $Y/2$, 电荷 $Q/2$ 作为力学变量基，利用（1）式表示如(4)式，

$$(I_3, Y/2; Q/2, G_\infty) = (I^*_3, Y^*/2; Q^*/2, G_\infty) = -1 \quad (4)$$

令 $I^*_3 = I_3 + \Delta I_3$ （5）

$Y^* = Y + \Delta Y$ （6）

$Q^* = Q + \Delta Q$ （7）

将（5）、（6）、（7）式带入（4）式得到：

$\Delta I_3 = \Delta Q/2 = \Delta Y/2$ （8）

（8）式即是强作用选择定则。又如，相对论的能量——动量关系可以用 P^2（$=P_x^2+P_y^2+P_z^2$）和 $m_0^2c^2$ 以及 $W^2/c^2 2$ 作为力学变量基表示为：

$$[P^2, m^2c^2; W^2/c^2 2, G_\infty] = [P^{*2}, m^{*2}c^2; W^{*2}/c^2 2, G_\infty] = -1 \quad (9)$$

现在，让我们讨论一个粒子在外场中的运动，如果一个粒子 F 在复射影平面上作圆周运动，假设在 t_0 时刻，F 位于 y_0 点，能量为 E_0，

动量为 P_0，圆心位于 O 点；在 t 时刻，F 位于 y 点，能量为 E，动量为 P，从 O 点向 y_0 点和 y 点分别引直线 l_1 和 l_2。设 l_1 和 l_2 的夹角为 θ，选取在 $t_0=0$ 时，$P_0=0$，$E_0=0$，则 θ 一定与 F 的四维动量 P_k 和四维位移 X_k 成正比（k=1，2，3，4），

$$\theta = Z P_k X_k = Z(p \cdot r - E t) \qquad (10)$$

其中 Z 为比例常数。因为 F 作圆周运动，所以 F 的轨迹一定通过圆环点 I 和 J，设通过 O 点的迷向直线为 l_I 和 l_J，且 l_1、l_2、l_I、l_J 四直线的交比为 D，根据 Laguerre 定理得到：

$$\theta = i\ln D/2 \qquad (11)$$

即 $D=\exp(-2i\theta)$　　（12）

将（10）代入（12）式得到：

$$D=\exp[-2iZ(p \cdot r-Et)] \qquad (13)$$

在（13）中对 r 和 t 求偏导数并与量子力学中的四维动量算符比较得：

$$-1/2Z=h/2\pi \qquad (14)$$

将（14）代入（13）并与量子力学中平面波函数比较，可知波函数 ψ 与交比 D 成正比，

$$\psi = ND \qquad (15)$$

所以，用交比 D 代替量子力学运动方程中的波函数 ψ 即可得到用交比表示的粒子的运动方程。应该指出，交比是一个完全确定的概念，而波函数的平方是一个不完全确定的几率概念，二者在这里结合在一起，说明对于粒子运动来讲，表面上的偶然性所反应的正是其本质上的必然性。因此，在实际应用时，是用交比 D 或用波函数 ψ 完全取

决于用哪一个对处理问题比较方便。在以下推导粒子的质量关系的讨论中，我们仍然沿用波函数的概念。

对于任意一个粒子，由于其结构的特殊性，如果把它分割为若干个亚粒子的螺旋带结构，则各个螺旋带之间的相对运动应当包括彼此质心之间的相对平移和各自绕质心的转动。为了使问题简化而又不失一般性，我们把每个亚粒子的螺旋带结构的宽度看作是一定的，根据上述模型，亚粒子与规范场的相互作用能 V 一定与亚粒子的螺旋带结构的中线长度 g 成正比，适当选取坐标使

$$V=B\,g \qquad (16)$$

其中 B 为常数。设 S 是螺旋带结构的中线 g 所围成的面积，根据等周不等式，

$$g^2-4\pi S\geqslant 0 \qquad (17)$$

因为只有当 g 所围面积是一个圆时，等号才成立，所以从（17）得到：

$$g=\pm 2\pi r \qquad (18)$$

其中，r 是 g 所围成的圆的半径。将（18）代入（16），我们得到亚粒子与规范场的相互作用能与亚粒子的螺旋带结构的中线所围成的圆的半径成正比，

$$V=\pm 2\pi Br \qquad (19)$$

另外，因为亚粒子的螺旋带结构之间相互缠绕，使得亚粒子的静质量 m_q 是不可测的，所以我们必须把 m_q 表示成由该亚粒子所构成的可观察粒子的质量 m 的函数，显然，m_q^c 应当与 m^a 成正比，其中 c 和 a 分别是 m_q 和 m 的某个指数参数，为了以下计算的方便而又不失一般

性，让我们取 c=2 并适当选取参数 a，使：

$$m_q=（A\,m^a+1）^{1/2}\qquad（a\neq 0）\qquad（20）$$

其中 A 为一个具有量纲的常数，$A\,m^a$ 和 1 都具有质量平方的量纲。应用独立粒子近似和（19)、(20）式，我们把一个相对论性的亚粒子在外场中的运动方程写成（自然单位制)：

$$[\alpha\cdot p-（A\,m^a+1）^{1/2}-\beta（E+2\pi Br）]\psi=0\qquad（21）$$

其中 E 为亚粒子能量的本征值。α、β 为通常的 Dirac 矩阵。在（21）式两边同除 2πB 并且令：

$$（2\pi B）^{1/2}r+E/（2\pi B）^{1/2}=\xi\qquad（22）$$

$$（A\,m^a+1）/（2\pi B）=L\qquad（23）$$

取ψ的大小两分量分别为 u_1 和 u_2，将（22）和（23）两式代入（21）式,并且消去 u_2 得：

$$[p^2（\xi）+\xi^2-L]\,u_1=0\qquad（24）$$

解（24）式得到：

$$m_n^a=\omega（n+3/2）+\omega^*\qquad（n=n_x+n_y+n_z=0，1，2，3，\cdots\cdots）\qquad（25）$$

其中 $\omega=4\pi B/A$，$\omega^*=1/A$，n_x, n_y, n_z 分别取值 0，1，2，3，……。实际上当 a=2 时（25）式正是文献[2]所给出的介子和重子的质量关系，由（25）式消去ω和 ω^* 我们得到：

$$（m_1^a，m_3^a；m_2^a，m_\infty）=-1\qquad（26）$$

$$D_n=（m_1^a，m_3^a；\ m_2^a，m_n^a）=2/（n-1）-1（n\geqslant 4）\qquad（27）$$

（26）和（27）式正是（1）式和（2）式，它表示若以质量函数 m_1^a，m_3^a，m_2^a 为一组力学变量基，则任意一个粒子的质量函数 m_n^a 与力学

变量基有确定的交比 D_n，因为 m_n^a 是任意的，所以（26）和（27）式对轻子、介子、重子普遍适用。我们称 n 为质量序数，称 a 为质量指数。在（26）式的基础上所建立的各个坐标系的力学变量基都是射影对应的，因而通过射影变换可以建立各个不同坐标系之间的联系，于是可以用轻子质量表示介子和重子质量，反之亦然，以致可以建立任意粒子间的联系。例如根据文献[3]的数据资料，如果要求交比的实验值与理论值的绝对误差 $R<10^{-3}$，则轻子的质量关系是

$$(m_e^{a1},\ m_\tau^{a1};\ m_\mu^{a1},\ m_\infty) = -0.999328234 \qquad (28)$$

其中 $a_1=165/1024$（R=0.000671766），（28）式中的 m_e^{a1}，m_τ^{a1}，m_μ^{a1}，构成一个力学变量基，利用（28）式可以预测，在轻子线上，质量序数依次为 4、5、6 的未知轻子的质量大约是 12.36Gev、53.96Gev 和 177.7Gev。利用 a_1，$n_e=1$，$n_\mu=2$，$n_\tau=3$ 和文献[3]的数据资料可以得到 $\omega_l=1.22$，$\omega_l^*=-2.16$，$A_l=-0.46$，$B_l=-0.04$，从而轻子的质量谱可以利用（25）式写成：

$$m_{nl}^{165/1024}=1.22(n_l+3/2)-2.16\ (n_l=n_e,\ n_\mu,\ n_\tau) \qquad (29)$$

将 A_l、B_l 代入（20）、（19），得构成轻子的亚粒子与轻子的质量关系：

$$m_{lq}=(-0.46m_l^{165/1024}+1)^{1/2} \qquad (30)$$

亚粒子与规范场的相互作用能的表示式为：

$$V_{lq}=\pm 0.25r \qquad (31)$$

根据文献[3]，介子和重子八重态的同位旋平均质量关系分别是：

$$(m_\pi^{a2},\ m_\eta^{a2};\ m_k^{a2},\ m_\infty) =-1.000357441 \qquad (32)$$

$$(m_N^{a3},\ m_\Sigma^{a3};\ m_\Lambda^{a3},\ m_\infty) =-0.999735173 \qquad (33)$$

（m_N^{a3}，m_Σ^{a3}；m_Λ^{a3}，m_Ξ^{a3}）=-0.605136411　　　（34）

其中，a_2=6.8046875，a_3=8.5，$n_\pi=n_N$ =1，$n_k=n_\Lambda$=2，$n_\eta=n_\Sigma$=3，n_Ξ=6

与以上得到ω_l、ω_l^*、A_l、B_l及（29）、（30）、（31）式的过程相同，

对于介子八重态ω_m=0.0084，ω_m^*=-0.021，A_m=-47.619，B_m=-0.0318，

$m_n^{6.8046875}$=0.0084（n+3/2）-0.021　（35）

m_{mq}=（-47.619$m_m^{6.8046875}$+1）$^{1/2}$　　（36）

V_{mq}=±0.2r　（37）

对于重子八重态ω_b=1.949，ω_b^*=-4.287，A_b=-0.233，B_b=-0.036，

$m_n^{8.5}$=1.949（n+3/2）-4.287　　　（38）

m_{bq}=（-0.233$m_b^{8.5}$+1）　　　（39）

V_{bq}=±0.226　（40）

类似地，我们还可以用重子十重态、ψ介子、ϒ介子、N 重子、Λ 重子、Σ 重子等建立坐标系，每个粒子在不同的坐标系中都有相应的 a 值和 n 值。表一是随机抽取的几个重子在重子八重态所确立的坐标系中的 n 值及它们与力学变量基的交比的实验值和理论值的比较，它们的 a 值都是 8.5，从表中可以看出，对于质量（单位：Gev）较大的共振态，理论与实验的符合程度更好。对于介子，表中没有列出，但计算表明，结果与重子的情形类似。

表一：几种重子的质量函数与力学变量基的交比值的理论值与实验值

粒子名称	n	D_n（理论值）	D_n（实验值）
N（1670）	41	-0.95	-0.94951079
N（1990）	175	-0.988505747	-0.988483342

N（2600）	1407	-0.998577524	-0.998577613
Λ（1520）	19	-0.888888888	-0.886598779
Λ（1815）	80	-0.974683544	-0.975080752
Λ（2350）	668	-0.997001499	-0.997000895
Σ（1385）	9	-0.75	-0.745830413
Σ（1750）	60	-0.966101694	-0.966075683
Σ（2455）	931	-0.997849462	-0.997849673
Ξ（2030）	206	-0.990243902	-0.990236904
Δ（1950）	148	-0.986394557	-0.986359415
Δ（2160）	342	-0.994134897	-0.994134382

四、结论

本文通过对粒子的各种反应过程和 Mŏbius 带分解、连接实验的各种结果进行分析比较，提出了粒子的 Mŏbius 结构模型，得到以下结论：亚粒子囚禁是一种普遍现象，它是由粒子的特殊结构造成的，夸克囚禁只是其中之一；在射影直线上对应于点 n 的力学变量 G_n 与该直线上的力学变量基有确定的交比 D_n，并且描述同一力学变量的不同射影直线上的点都是射影对应的；粒子的波函数与粒子运动轨迹上包括圆环点在内的四点的交比成正比；利用各粒子质量函数之间的调和分割和射影对应可以建立各种不同的粒子间的质量关系。

参考文献 (References)

（1）T. D. Lee, Field theory and particle physics, Beijing: Science press, 1983, P32-38 (in Chinese)
（李政道，场论与粒子物理学，北京，科学出版社，1983，32—38）

（2）Hu Nin, The wave equation and the energy level of the baryon in the straton model. In Wang Zhu-Xi, Peng Huan-Wu, Lin Ja-Qiao, Hu Nin, A collection of the thesis of the theoretical physics and the mechanics, Beijing: Science Press, 1982，61-67（in Chinese）

（胡宁，层子模型中重子态的波动方程和能级，见：王竹溪、彭桓武、林家翘、胡宁，理论物理与力学论文集，北京，科学出版社，1982，61—67）

（3）T. D. Lee, Particle physics and introduction to field theory, translator: Tang Ju-Fei, Qing Cheng-Rui, Zhu Chong-Yuan, Beijing: Science Press, 1984，P354-369（in Chinese）

（李政道，粒子物理与场论简引，汤拒非、庆承瑞、朱重远译，北京，科学出版社，1984，354—369）